

LOIS PRÉ-LIE EN INTERACTION

par

Dominique Manchon & Abdellatif Saïdi

Résumé. — Dans l'article [6], Damien Calaque, Kurusch Ebrahimi-Fard et Dominique Manchon ont introduit un nouveau coproduit sur une algèbre commutative de forêts d'arbres enracinés \mathcal{H} . L'algèbre de Lie des éléments primitifs du dual gradué \mathcal{H}^0 est munie d'une structure pré-Lie à gauche, notée \triangleright qui s'exprime en termes d'insertion d'un arbre dans un autre. Dans ce travail nous montrons qu'il y a une relation "de dérivation" reliant cette structure à la structure pré-Lie à gauche de greffe d'un arbre sur un autre [4], notée \rightarrow , obtenue sur l'algèbre de Lie des éléments primitifs du dual gradué \mathcal{H}_{CK}^0 de l'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer \mathcal{H}_{CK} [5].

Abstract. — In [6], Damien Calaque, Kurusch Ebrahimi-Fard and Dominique Manchon define a Hopf algebra \mathcal{H} by introducing a new coproduct on a commutative algebra of rooted forests. The space of primitive elements of the graded dual \mathcal{H}^0 is endowed with a left pre-Lie product denoted by \triangleright , defined in terms of insertion of a tree inside another. In this work we prove a "derivation" relation between the pre-Lie structure \triangleright and the left pre-Lie product \rightarrow [4] on the space of primitive elements of the graded dual \mathcal{H}_{CK}^0 of the Connes-Kreimer Hopf algebra \mathcal{H}_{CK} [5], defined by grafting.

Table des matières

1. Introduction.....	1
2. L'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer \mathcal{H}_{CK}	2
3. L'algèbre de Hopf \mathcal{H}	4
4. Relation entre \mathcal{H} et \mathcal{H}_{CK}	6
5. Quatre lois pré-Lie.....	7
6. Relation entre les lois pré-Lie de greffe et d'insertion.....	7
Références.....	13

1. Introduction

Soit K un corps. Une K -algèbre magmatique $(E, *)$ est un espace vectoriel E muni d'une application bilinéaire qui à chaque bipoint (x, y) associe $x * y$. Pour tout $x \in E$ on note L_x l'application linéaire de E définie par :

$$(1) \quad L_x(y) = x * y, \text{ pour tout } y \in E.$$

On munit E du crochet suivant :

$$(2) \quad [x, y] = x * y - y * x.$$

Soit $\mathcal{L}(E) = \{f : E \longrightarrow E, f \text{ linéaire}\}$. On munit $\mathcal{L}(E)$ du crochet de Lie habituel :

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f, \text{ pour tout } f, g \in \mathcal{L}(E).$$

$(E, *)$ est dite algèbre pré-Lie à gauche [2] si :

$$(3) \quad L_{[x, y]} = [L_x, L_y], \text{ pour tout } x, y \in E,$$

i.e.

$$(4) \quad (x * y - y * x) * z = x * (y * z) - y * (x * z), \text{ pour tout } x, y, z \in E.$$

Ainsi une algèbre pré-Lie à gauche [4] est un K -espace vectoriel L muni d'une application bilinéaire $*$ vérifiant la relation suivante: Pour tout x, y et z dans L :

$$(5) \quad (x * y) * z - x * (y * z) = (y * x) * z - y * (x * z).$$

C'est-à-dire si on note par (x, y, z) l'expression $(x * y) * z - x * (y * z)$ la relation (5) s'écrit :

$$(6) \quad (x, y, z) = (y, x, z).$$

De la même manière si on a :

$$(7) \quad (x, y, z) = (x, z, y) \text{ pour tout } x, y, z \in L,$$

on dira que L est une algèbre pré-Lie à droite.

En particulier, si $(L, *)$ est une algèbre pré-Lie à gauche alors $(L, *^{\text{op}})$ est une algèbre pré-Lie à droite où $*^{\text{op}}$ est défini par :

$$(8) \quad x *^{\text{op}} y = y * x.$$

Une algèbre pré-Lie $(L, *)$ munie du crochet :

$$(9) \quad [x, y] = x * y - y * x \text{ pour tout } x, y \in L,$$

est une algèbre de Lie.

2. L'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer \mathcal{H}_{CK}

2.1. Définition. — Soit \mathcal{T}_n l'espace vectoriel engendré par les arbres enracinés à n sommets. Soit \mathcal{T} l'espace vectoriel gradué $\bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{T}_n$. L'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer [5] est définie comme l'algèbre symétrique de \mathcal{T} , i.e : $\mathcal{H}_{CK} = S(\mathcal{T})$. On note $\mathbf{1}$ l'unité de \mathcal{H}_{CK} identifiée à l'arbre vide. Le coproduit Δ_{CK} [7] est défini par :

$$(10) \quad \Delta_{CK}(t) = \mathbf{1} \otimes t + t \otimes \mathbf{1} + \sum_{c \in \text{Adm}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t),$$

où $\text{Adm}(t)$ désigne l'ensemble des coupes admissibles c de l'arbre t , où $P^c(t)$ correspond au branchage et $R^c(t)$ correspond au tronc. On rappelle qu'une coupe est un ensemble non vide d'arêtes. Une coupe est dite non admissible s'il existe un sommet de t tel que le trajet de la racine à ce dernier rencontre au moins 2 arêtes de la coupe. Une coupe élémentaire est une coupe contenant une seule arête de t . Si $F = t_1.t_2...t_n$ est une forêt, on a :

$$(11) \quad \Delta_{CK}(F) = \Delta_{CK}(t_1)\Delta_{CK}(t_2)...\Delta_{CK}(t_n).$$

\mathcal{H}_{CK} est une algèbre de Hopf graduée, la graduation est suivant le nombre de sommets.

Exemple 1. —

$$(12) \quad \Delta_{CK}(\text{arbre à 2 sommets}) = \mathbf{1} \otimes \text{arbre à 2 sommets} + \text{arbre à 2 sommets} \otimes \mathbf{1} + \bullet \otimes \text{arbre à 1 sommet} + \text{arbre à 1 sommet} \otimes \bullet + \bullet \otimes \text{arbre à 2 sommets} + \text{arbre à 1 sommet} \otimes \bullet + \bullet \otimes \bullet$$

2.2. Dual gradué de \mathcal{H}_{CK} . — Soit \mathcal{H}_{CK}^0 le dual gradué de \mathcal{H}_{CK} : $\mathcal{H}_{CK}^0 = \bigoplus (\mathcal{H}_{CK,n})^*$ où $\mathcal{H}_{CK,n}$ désigne l'espace vectoriel engendré par les forêts à n sommets. Alors \mathcal{H}_{CK}^0 est une algèbre de Hopf [7]. On note (δ_u) la base duale dans $(\mathcal{H}_{CK,n})^*$ de la base des forêts de degré n dans $\mathcal{H}_{CK,n}$. La correspondance $u \mapsto \delta_u$ définit un isomorphisme linéaire de \mathcal{H}_{CK} sur son dual gradué \mathcal{H}_{CK}^0 .

Lemme 1. — (voir [6]) Pour tout t arbre dans \mathcal{T} l'élément δ_t est un caractère infinitésimal (i.e. $\delta_t(xy) = \delta_t(x)e(y) + e(x)\delta_t(y)$ pour tout x, y arbres dans \mathcal{T} , où e est l'élément neutre pour le produit de convolution $*$).

Lemme 2. — L'espace des caractères infinitésimaux est une algèbre de Lie pour le crochet :

$$(13) \quad [\delta_t, \delta_{t'}] = \delta_t * \delta_{t'} - \delta_{t'} * \delta_t.$$

Démonstration. — δ_t et $\delta_{t'}$ sont primitifs dans \mathcal{H}_{CK}^0 donc leur crochet de Lie aussi. □

2.3. La loi pré-Lie de greffe. — Soient t, t' et x des arbres dans \mathcal{T} , on définit :

$$(14) \quad \langle \delta_{t \rightarrow t'}, x \rangle = \sum_{c \in \mathcal{E}lm(x)} \langle \delta_t, P^c(x) \rangle \langle \delta_{t'}, R^c(x) \rangle,$$

où $\mathcal{E}lm(x)$ désigne l'ensemble des coupes élémentaires de x . Ainsi $\langle \delta_{t \rightarrow t'}, x \rangle$ est le nombre de coupes élémentaires de x tels que $P^c(x) = t$ et $R^c(x) = t'$. Par suite :

$$(15) \quad t \rightarrow t' = \sum_{x \text{ arbre}} N(t, t', x) x,$$

où $N(t, t', x)$ est le nombre de coupes élémentaires de x tels que $P^c(x) = t$ et $R^c(x) = t'$. On obtient :

$$(16) \quad [\delta_t, \delta_{t'}] = \delta_{t \rightarrow t' - t' \rightarrow t}.$$

Exemple 2. —

$$(17) \quad \bullet \rightarrow \vee = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \vee \end{array} + 3 \Psi$$

Pour un arbre t on note $\sigma(t)$ son facteur de symétrie, c'est-à-dire le nombre d'automorphismes de t . On définit une autre loi \rightarrow_σ liée à la précédente comme suit :

$$(18) \quad t \rightarrow_\sigma t' = \sum_{x \text{ arbre}} M(t, t', x) x,$$

où $M(t, t', x) = N(t, t', x) \frac{\sigma(t)\sigma(t')}{\sigma(x)}$ est le nombre de manières de greffer t sur t' pour obtenir x .

Exemple 3. —

$$(19) \quad \bullet \rightarrow_\sigma \vee = 2 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \vee \end{array} + \Psi$$

On a de façon évidente :

$$(20) \quad \phi(t \rightarrow_\sigma t') = \phi(t) \rightarrow \phi(t'),$$

où ϕ est l'isomorphisme linéaire de \mathcal{T} dans \mathcal{T} défini par $\phi(t) = \sigma(t)t$ pour tout arbre t .

Proposition 3. — Les lois de greffe \rightarrow et \rightarrow_σ sont des lois pré-Lie à gauche.

Démonstration. — Soient t, t' et t'' des arbres dans \mathcal{T} , on a :

$$(21) \quad t' \rightarrow_{\sigma} t'' = \sum_{v \in t''} t' \circ_v t'',$$

où $t' \circ_v t'' :=$ est donné par la greffe de t' sur le sommet v de t'' . Par suite :

$$(22) \quad t \rightarrow_{\sigma} (t' \rightarrow_{\sigma} t'') = t \rightarrow_{\sigma} \left(\sum_{v \in t''} t' \circ_v t'' \right)$$

$$(23) \quad = \sum_{v \in t''} \sum_{w \in t'} t \circ_w t' \circ_v t'' + \sum_{v \in t''} \sum_{w \in t''} t \circ_w (t' \circ_v t'').$$

De même on a :

$$(24) \quad (t \rightarrow_{\sigma} t') \rightarrow_{\sigma} t'' = \sum_{v \in t''} \sum_{w \in t'} t \circ_w (t' \circ_v t'').$$

Ainsi $t \rightarrow_{\sigma} (t' \rightarrow_{\sigma} t'') - (t \rightarrow_{\sigma} t') \rightarrow_{\sigma} t'' = \sum_{v \in t''} \sum_{w \in t''} t \circ_w (t' \circ_v t'')$. On voit que le membre de droite est symétrique en t et t' , ce qui montre que \rightarrow_{σ} est pré-Lie à gauche. L'assertion pour la loi \rightarrow s'en déduit immédiatement grâce à (20). □

3. L'algèbre de Hopf \mathcal{H}

3.1. Définition. — [6] Soit \mathcal{T}' l'espace vectoriel engendré par les arbres qui contiennent au moins une arête. On considère \mathcal{H} comme l'algèbre symétrique de \mathcal{T}' i.e. $\mathcal{H} = S(\mathcal{T}')$. L'unité de \mathcal{H} est identifiée à l'arbre sans arêtes \bullet . Cette algèbre est caractérisée par son coproduit Δ tel que $\Delta(\bullet) = \bullet \otimes \bullet$ et pour tout arbre t différent de l'arbre vide on définit :

$$(25) \quad \Delta(t) = \sum_{s \text{ sous-forêt de } t} s \otimes t/s,$$

où une sous-forêt s de t est soit la forêt triviale \bullet et dans ce cas $t/s = t$, soit une collection (t_1, t_2, \dots, t_n) de sous-arbres disjoints de t et non triviaux (i.e. ayant chacun au moins une arête). L'arbre t/s est l'arbre contracté que l'on obtient en écrasant chaque composante de la sous-forêt sur un point (voir [6]).

Exemple 4. —

$$(26) \quad \Delta(\text{arbre à 2 arêtes}) = \bullet \otimes \text{arbre à 2 arêtes} + \text{arbre à 2 arêtes} \otimes \bullet + 2 \bullet \otimes \text{arbre à 2 arêtes} + \bullet \otimes \bullet + \bullet \otimes \bullet + \text{arbre à 2 arêtes} \otimes \bullet + \bullet \otimes \bullet.$$

Cette algèbre est une algèbre de Hopf graduée [7], la graduation étant suivant le nombre des arêtes.

3.2. Dual gradué de \mathcal{H} . — Soit \mathcal{H}^0 le dual gradué de \mathcal{H} , soit $(Z_s), (s \text{ forêt dans } \mathcal{H})$ la base duale de \mathcal{H} . Pour tout $t \in \mathcal{T}'$, Z_t est un caractère infinitésimal (donc primitif dans \mathcal{H}^0). Si on note par \star le produit de convolution dans \mathcal{H}^0 , on obtient que l'ensemble des caractères infinitésimaux de \mathcal{H} est une algèbre de Lie pour le crochet suivant :

$$(27) \quad [Z_t, Z_u] = Z_t \star Z_u - Z_u \star Z_t,$$

où t et u sont des arbres dans \mathcal{T}' . On a :

$$\begin{aligned}
 \langle Z_t \star Z_u, v \rangle &= \langle Z_t \otimes Z_u, \Delta(v) \rangle \\
 &= \sum_{s \text{ dans } v} \langle Z_t, s \rangle \langle Z_u, v/s \rangle \\
 &= \mathcal{N}(t, u, v),
 \end{aligned}$$

où $\mathcal{N}(t, u, v)$ est le nombre de sous arbres de v isomorphes à t tel que le contracté v/t soit isomorphe à u .

3.3. La loi pré-Lie d'insertion. — On définit la loi \triangleright comme l'insertion d'un arbre dans un autre (voir [6]), pour deux arbres t et t' on définit :

$$(28) \quad t \triangleright t' = \sum_{x \text{ arbre}} \mathcal{N}(t, t', x) x.$$

On obtient alors :

$$(29) \quad Z_t \star Z_{t'} - Z_{t'} \star Z_t = Z_{t \triangleright t' - t' \triangleright t}.$$

Si Π désigne la projection de \mathcal{H}^0 sur $\text{Prim}(\mathcal{H}^0)$ parallèlement à $\mathcal{H}' = \langle Z_f \rangle$ où f est une forêt non triviale (produit d'au moins deux arbres). On note $\tilde{\Pi} = \text{Id}_{\mathcal{H}^0} - \Pi$, on aura :

$$(30) \quad Z_{t \triangleright t'} = \Pi(Z_t \star Z_{t'})$$

Lemme 4. — Soit t un arbre et f une forêt non vide. Alors :

$$(31) \quad \Pi(Z_t \star Z_f) = \Pi(Z_t \star \Pi(Z_f)).$$

Démonstration. — -Si f est un arbre on a directement le résultat.

-Si f est une forêt non triviale, soit u un arbre. Alors :

$$\begin{aligned}
 \langle Z_t \star Z_f, u \rangle &= \langle Z_t \otimes Z_f, \Delta(u) \rangle \\
 &= \sum_{s \text{ sous-forêt de } u} \langle Z_t, s \rangle \langle Z_f, u/s \rangle \\
 &= 0 \text{ car } u/s \text{ arbre.}
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\Pi(Z_t \star Z_f) = \Pi(Z_t \star \Pi(Z_f)) = 0.$$

□

Lemme 5. — Soient t, u deux arbres alors :

$$(32) \quad \tilde{\Pi}(Z_t \star Z_u) = \tilde{\Pi}(Z_u \star Z_t).$$

Démonstration. — Les éléments primitifs de \mathcal{H}^0 forment une algèbre de Lie pour la convolution \star , ce qui prouve :

$$\tilde{\Pi}(Z_t \star Z_u - Z_u \star Z_t) = 0.$$

□

Proposition 6. — *La loi d'insertion est une loi pré-Lie à gauche.*

Démonstration. — Soient t, u et v trois arbres, on a :

$$\begin{aligned}
Z_{t \triangleright (u \triangleright v) - (t \triangleright u) \triangleright v} &= \Pi(Z_t \star Z_{u \triangleright v}) - \Pi(Z_{t \triangleright u} \star Z_v) \\
&= \Pi(Z_t \star \Pi(Z_{u \triangleright v})) - \Pi(\Pi(Z_t \star Z_u) \star Z_v) \\
&= \Pi(Z_t \star Z_u \star Z_v) - \Pi(\Pi(Z_t \star Z_u) \star Z_v) \\
&= \Pi(\tilde{\Pi}(Z_t \star Z_u) \star Z_v) \\
&= \Pi(\tilde{\Pi}(Z_u \star Z_t) \star Z_v) \text{ (d'après le lemme 5)} \\
&= Z_{u \triangleright (t \triangleright v) - (u \triangleright t) \triangleright v},
\end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$t \triangleright (u \triangleright v) - (t \triangleright u) \triangleright v = u \triangleright (t \triangleright v) - (u \triangleright t) \triangleright v.$$

Par suite \triangleright est une loi pré-Lie à gauche.

□

Remarque 7. — *La proposition 3 peut se montrer d'une manière analogue.*

4. Relation entre \mathcal{H} et \mathcal{H}_{CK}

L'algèbre \mathcal{H} coagit à gauche sur l'algèbre de Connes-Kreimer \mathcal{H}_{CK} (voir [6]) par l'unique morphisme d'algèbre $\Phi : \mathcal{H}_{CK} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK}$ défini par : $\Phi(\mathbf{1}) = \bullet \otimes \mathbf{1}$ et $\Phi(t) = \Delta(t)$ si $t \neq \mathbf{1}$.

Théorème 8. — (voir le théorème 6 de [6]) *L'application Φ vérifie :*

$$(33) \quad (Id_{\mathcal{H}} \otimes \Delta_{CK}) \circ \Phi = m^{1,3} \circ (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{CK},$$

i.e. le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_{CK} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK} \\
\Delta_{CK} \downarrow & & \downarrow I \otimes \Delta_{CK} \\
\mathcal{H}_{CK} \otimes \mathcal{H}_{CK} & & \\
\Phi \otimes \Phi \downarrow & & \\
\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK} & \xrightarrow{m^{1,3}} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK} \otimes \mathcal{H}_{CK}
\end{array}$$

où :

$$\begin{aligned} m^{1,3} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK} &\longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{CK} \otimes \mathcal{H}_{CK} \\ a \otimes b \otimes c \otimes d &\longmapsto ac \otimes b \otimes d \end{aligned}$$

Proposition 9. — Soient $\alpha \in \mathcal{H}^0$ et $a \in \mathcal{H}_{CK}^0$ alors on a :

$$(34) \quad \alpha \star Z_{\bullet} = Z_{\bullet} \star \alpha = \alpha$$

$$(35) \quad Z_{\bullet} \star a = a \star Z_{\bullet} = a$$

Démonstration. — voir corollaire 10 de [6]. □

5. Quatre lois pré-Lie

En plus des deux lois pré-Lie \rightarrow et \rightarrow_{σ} définies au paragraphe 2.3, on définit pour $u, v \in \mathcal{T}'$:

$$(36) \quad u \triangleright v = \sum_{w \text{ arbre}} \mathcal{N}(u, v, w)w,$$

où $\mathcal{N}(u, v, w)$ désigne le nombre de sous arbres de w isomorphes à u tels que le contracté w/u soit isomorphe à v .

Exemple 5. —

$$(37) \quad \text{!} \triangleright \text{V} = 2 \text{!V} + \text{Y} + 3 \text{V}.$$

On définit maintenant une autre loi pré-Lie liée à la loi \triangleright par \triangleright_{σ} tels que pour tout $u, v \in \mathcal{T}'$:

$$(38) \quad u \triangleright_{\sigma} v = \sum_{w \text{ arbre}} \mathcal{M}(u, v, w)w,$$

où $\mathcal{M}(u, v, w) = \mathcal{N}(u, v, w) \frac{\sigma(u)\sigma(v)}{\sigma(w)}$ représente le nombre de manières d'insérer u dans v pour obtenir w .

Exemple 6. —

$$(39) \quad \text{!} \triangleright_{\sigma} \text{V} = 4 \text{!V} + \text{Y} + \text{V}$$

On a de façon évidente une relation analogue à (20) :

$$(40) \quad \phi(u \triangleright_{\sigma} v) = \phi(u) \triangleright \phi(v),$$

La question qui se pose ici est la suivante : y a-t-il une relation reliant les deux structures pré-Lie \rightarrow et \triangleright (ou de façon équivalente, \rightarrow_{σ} et \triangleright_{σ})?

6. Relation entre les lois pré-Lie de greffe et d'insertion

Dans ce paragraphe nous montrons qu'il y a une relation reliant les deux structures pré-Lie précédentes.

Théorème 10. — Pour tout $\alpha \in \mathcal{H}^0$ et $a, b \in \mathcal{H}_{CK}^0$ on a :

$$(41) \quad \sum_{(\alpha)} (\alpha_1 \star a) \star (\alpha_2 \star b) = \alpha \star (a \star b),$$

où l'on utilise la notation de Sweedler : $\Delta(\alpha) = \sum_{(\alpha)} \alpha_1 \otimes \alpha_2$ ([1], [8], [9]).

Démonstration. — En dualisant le diagramme du théorème 8 on obtient le résultat. □

En conséquence si $\alpha \in \mathcal{H}^0$ est un caractère infinitésimal, en particulier α est un élément primitif donc :

$$(42) \quad \Delta(\alpha) = \alpha \otimes Z_{\bullet} + Z_{\bullet} \otimes \alpha.$$

Par suite pour tout $a, b \in \mathcal{H}_{CK}^0$ on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha \star (a \star b) &= (\alpha \star a) \star (Z_{\bullet} \star b) + (Z_{\bullet} \star a) \star (\alpha \star b) \\ &= (\alpha \star a) \star b + a \star (\alpha \star b), \text{ (d'après la proposition 9).} \end{aligned}$$

Soient Π_{CK} la projection de \mathcal{H}_{CK}^0 sur les éléments primitifs de \mathcal{H}_{CK}^0 parallèlement à $\mathcal{H}'_{CK} = \langle \delta_f \rangle$ où f est une forêt non triviale.

Lemme 11. — *Soit f une forêt non vide et t un arbre dans \mathcal{T} alors on a :*

$$(43) \quad \Pi_{CK}(Z_t \star \delta_f) = \Pi_{CK}(Z_t \star \Pi_{CK}(\delta_f))$$

Démonstration. — - Si f est un arbre, on a directement le résultat car $\Pi_{CK}(\delta_f) = \delta_f$.

- Si f est une forêt non triviale, soit u un arbre dans \mathcal{H}_{CK} alors deux cas se présentent : $u = \mathbf{1}$ ou $u \in \text{Ker } \epsilon$, où ϵ est la co-unité pour l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_{CK} .

* Si $u = \mathbf{1}$ alors :

$$\begin{aligned} \langle Z_t \star \delta_f, u \rangle &= \langle Z_t \otimes \delta_f, \Phi(\mathbf{1}) \rangle \\ &= \langle Z_t \otimes \delta_f, \bullet \otimes \mathbf{1} \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

or $\Pi_{CK}(\delta_f) = 0$, donc le résultat est vrai pour l'arbre $\mathbf{1}$.

* Si $u \in \text{Ker } \epsilon$ on a :

$$\begin{aligned} \langle Z_t \star \delta_f, u \rangle &= \langle Z_t \otimes \delta_f, \Delta(u) \rangle \\ &= \sum_{s \text{ sous-forêt de } u} Z_t(s) \delta_f(u/s) \\ &= 0, \end{aligned}$$

Car le contracté u/s est un arbre. Ainsi on obtient que :

$$\Pi_{CK}(Z_t \star \delta_f) = 0 = \Pi_{CK}(Z_t \star \Pi_{CK}(\delta_f)).$$

Par suite on conclut que :

$$\Pi_{CK}(Z_t \star \delta_f) = \Pi_{CK}(Z_t \star \Pi_{CK}(\delta_f)).$$

□

Lemme 12. — *Pour tout arbre $t \in \mathcal{T}'$ et $u \in \mathcal{T}$ on a :*

$$(44) \quad Z_t \star \delta_u = \delta_{t \triangleright u}$$

Démonstration. — Soit w un arbre dans \mathcal{T} alors :

-Si $w = \mathbf{1}$ alors $\langle Z_t \star \delta_u, w \rangle = 0 = \langle \delta_{t \triangleright u}, \mathbf{1} \rangle$.

-Si $w \in \text{Ker } \epsilon$ alors :

$$\begin{aligned} \langle Z_t \star \delta_u, w \rangle &= \langle Z_t \otimes \delta_u, \Delta(w) \rangle \\ &= \sum_{s \text{ sous-forêt de } w} \langle Z_t, s \rangle \langle \delta_u, w/s \rangle \\ &= \langle \delta_{t \triangleright u}, w \rangle. \end{aligned}$$

-Si $w = w_1 w_2$ où w_1, w_2 deux arbres.

On a Φ est un morphisme d'algèbre donc :

$$\begin{aligned} \langle Z_t \star \delta_u, w_1 w_2 \rangle &= \langle Z_t \otimes \delta_u, \Phi(w_1) \Phi(w_2) \rangle \\ &= \sum_{s_1 \text{ de } w_1, s_2 \text{ de } w_2} \langle Z_t, s_1 s_2 \rangle \langle \delta_u, w_1/s_1 w_2/s_2 \rangle \\ &= 0 = \langle \delta_{t \triangleright u}, w_1 w_2 \rangle. \end{aligned}$$

□

Théorème 13. — Pour tout $t \in \mathcal{T}'$ et $u, v \in \mathcal{T}$ on a :

$$(45) \quad t \triangleright (u \rightarrow v) = (t \triangleright u) \rightarrow v + u \rightarrow (t \triangleright v).$$

Démonstration. — Soit $t \in \mathcal{T}'$ et $u, v \in \mathcal{T}$, d'après conséquence du théorème 10 on a :

$$Z_t \star (\delta_u * \delta_v) = (Z_t \star \delta_u) * \delta_v + \delta_u * (Z_t \star \delta_v)$$

donc :

$$\Pi_{CK}(Z_t \star (\delta_u * \delta_v)) = \Pi_{CK}((Z_t \star \delta_u) * \delta_v) + \Pi_{CK}(\delta_u * (Z_t \star \delta_v)).$$

Par suite :

$$\Pi_{CK}(Z_t \star \Pi_{CK}(\delta_u * \delta_v)) = \Pi_{CK}(\delta_{t \triangleright u} * \delta_v) + \Pi_{CK}(\delta_u * \delta_{t \triangleright v}), \text{ (lemmes 11+12).}$$

Ainsi

$$\Pi_{CK}(Z_t \star \delta_{u \rightarrow v}) = \delta_{(t \triangleright u) \rightarrow v} + \delta_{u \rightarrow (t \triangleright v)},$$

d'où :

$$\delta_{t \triangleright (u \rightarrow v)} = \delta_{(t \triangleright u) \rightarrow v} + \delta_{u \rightarrow (t \triangleright v)},$$

ce qui prouve que :

$$t \triangleright (u \rightarrow v) = (t \triangleright u) \rightarrow v + u \rightarrow (t \triangleright v).$$

□

Remarque 14. — D'après (20), (40) et le théorème précédent on montre aussi que pour tout $t \in T'$ et $u, v \in T$:

$$(46) \quad t \triangleright_{\sigma} (u \rightarrow_{\sigma} v) = (t \triangleright_{\sigma} u) \rightarrow_{\sigma} v + u \rightarrow_{\sigma} (t \triangleright_{\sigma} v).$$

6.1. Quelques calculs explicites. —

Exemple 7. — Soient $t = \mathbf{\downarrow}$, $u = \bullet$ et $v = \mathbf{\downarrow}$ on a :

$$(47) \quad u \rightarrow v = \bullet \rightarrow \mathbf{\downarrow} = \mathbf{\downarrow} + 2\mathbf{\searrow},$$

donc :

$$(48) \quad t \triangleright (u \rightarrow v) = \mathbf{\downarrow} \triangleright \mathbf{\downarrow} + 2\mathbf{\downarrow} \triangleright \mathbf{\searrow}$$

$$(49) \quad = 3\mathbf{\downarrow} + 2\mathbf{\searrow} + \mathbf{\searrow} + (4\mathbf{\searrow} + 2\mathbf{\searrow} + 6\mathbf{\searrow})$$

$$(50)$$

$$(51) \quad = 3\mathbf{\downarrow} + 4\mathbf{\searrow} + 5\mathbf{\searrow} + 6\mathbf{\searrow}$$

Or :

$$(52) \quad t \triangleright v = \mathbf{\downarrow} \triangleright \mathbf{\downarrow} = 2\mathbf{\downarrow} + 2\mathbf{\searrow}$$

donc :

$$\begin{aligned} u \rightarrow (t \triangleright v) &= 2(\bullet \rightarrow \mathbf{\downarrow}) + 2(\bullet \rightarrow \mathbf{\searrow}) \\ &= 2(\mathbf{\downarrow} + 2\mathbf{\searrow} + \mathbf{\searrow}) + 2(\mathbf{\searrow} + 3\mathbf{\searrow}) \\ &= 2\mathbf{\downarrow} + 4\mathbf{\searrow} + 4\mathbf{\searrow} + 6\mathbf{\searrow} \end{aligned}$$

par suite :

$$(53) \quad t \triangleright (u \rightarrow v) - u \rightarrow (t \triangleright v) = \mathbf{\downarrow} + \mathbf{\searrow},$$

or :

$$\begin{aligned} (t \triangleright u) \rightarrow v &= (\mathbf{\downarrow} \triangleright \bullet) \rightarrow \mathbf{\downarrow} \\ &= \mathbf{\downarrow} \rightarrow \mathbf{\downarrow} \\ &= \mathbf{\downarrow} + \mathbf{\searrow}, \end{aligned}$$

ce qui est la différence $t \triangleright (u \rightarrow v) - u \rightarrow (t \triangleright v)$

Exemple 8. — On prend dans cet exemple :

$$t = \mathbf{\downarrow}, u = \mathbf{\searrow}, v = \mathbf{\searrow}.$$

- Calcul de $t \triangleright (u \rightarrow v)$.

On a :

$$u \rightarrow v = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}.$$

Donc :

$$t \triangleright (u \rightarrow v) = (\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \triangleright \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}) + (\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \triangleright \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}) + 2(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \triangleright \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}).$$

Notons respectivement (1), (2) et (3) les termes précédents. On aura alors :

$$(1) = 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array},$$

$$(2) = 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}$$

et

$$(3) = 4 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 6 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 4 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}.$$

Par suite :

$$(54) \quad t \triangleright (u \rightarrow v) = (1) + (2) + (3).$$

-Calcul de $u \rightarrow (t \triangleright v)$:

On a :

$$\begin{aligned} t \triangleright v &= \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \triangleright \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \\ &= 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \end{aligned}$$

Par suite :

$$u \rightarrow (t \triangleright v) = 2(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}) + 3(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}) + 2(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}) + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array},$$

Notons (1'), (2'), (3') et (4') les termes de la somme précédente on aura :

$$(1') = 2(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}),$$

$$(2') = 3(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}),$$

$$(3') = 2(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}),$$

$$(4') = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}.$$

Ainsi :

$$(55) \quad u \rightarrow (t \triangleright v) = (1') + (2') + (3') + (4').$$

La différence (54)-(55), nous donne :

$$t \triangleright (u \rightarrow v) - u \rightarrow (t \triangleright v) = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \bullet \end{array}.$$

-Calcul de $(t \triangleright u) \rightarrow v$:

On a :

$$\begin{aligned} t \triangleright u &= \text{diagram 1} \triangleright \text{diagram 2} \\ &= \text{diagram 3} + 2 \text{diagram 4} + 3 \text{diagram 5} \end{aligned}$$

Par suite :

$$(t \triangleright u) \rightarrow v = \text{diagram 6} + \text{diagram 7} + \text{diagram 8} + 2(\text{diagram 9} + \text{diagram 10} + \text{diagram 11}) + 3(\text{diagram 12} + \text{diagram 13} + \text{diagram 14}),$$

ce qui est bien la différence $t \triangleright (u \rightarrow v) - u \rightarrow (t \triangleright v)$.

6.2. Une approche opéradique. — Le théorème 13 est un cas particulier d'un phénomène général de nature opéradique. Rappelons qu'une opérade vectorielle unitaire \mathcal{P} est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'un espace vectoriel \mathcal{P}_n muni d'une action du groupe symétrique S_n , et d'une loi de composition :

$$(56) \quad \gamma : \mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_{p_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_{p_n} \longrightarrow \mathcal{P}_{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

satisfaisant des axiomes d'associativité et d'équivariance par rapport aux actions des groupes symétriques en présence. L'unitarité s'écrit $\mathcal{P}_1 = K.e$ (K est le corps de base) où e vérifie :

$$(57) \quad \gamma(e; \beta) = \beta$$

$$(58) \quad \gamma(\beta; e, e, \dots, e) = \beta.$$

Pour tout $\alpha \in \mathcal{P}_n, \beta \in \mathcal{P}_p$ et pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ la composition partielle $\alpha \circ_i \beta \in \mathcal{P}_{n+p-1}$ est définie par :

$$(59) \quad \alpha \circ_i \beta = \gamma(\alpha; \underbrace{e, \dots, e}_{i-1 \text{ termes}}, \beta, e, \dots, e).$$

La somme des compositions partielles :

$$(60) \quad \alpha \triangleleft \beta := \sum_{i=1}^n \alpha \circ_i \beta$$

est une loi pré-Lie à droite [3].

L'associativité et l'équivariance impliquent notamment :

1. Pour tout $\sigma \in S_n$ et pour tout $\tau \in S_p$, on a :

$$\sigma \alpha \circ_i \tau \beta = (\sigma \circ_i \tau)(\alpha \circ_i \beta)$$

où $\sigma \circ_i \tau$ est la permutation de $\{1, \dots, n+p-1\}$ obtenue en permutant $\{i, \dots, i+p-1\}$ à l'aide de τ , puis en permutant $\{1, \dots, i-1, \{i+1, \dots, n+p-1\}, i+1, \dots, n+p-1\}$ à l'aide de σ .

2. Pour tout $\mu \in \mathcal{P}_n$, pour tout $\beta_j \in \mathcal{P}_{p_j}, j = 1, \dots, n$ et pour tout $\alpha \in \mathcal{P}_q$ on a l'égalité suivante dans $\mathcal{P}_{p_1+\cdots+p_n+q-1}$:

$$(61) \quad \gamma(\mu; \beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_j \circ_i \alpha, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n) = \gamma(\mu; \beta_1, \dots, \beta_n) \circ_{p_1+\cdots+p_{j-1}+i} \alpha.$$

3. Pour tout $\mu \in \mathcal{P}_n, \beta_j \in \mathcal{P}_{p_j}, j = 1, \dots, n$ et pour tout $\sigma \in S_n, \tau_j \in S_{p_j}$ on a :

$$\gamma(\sigma\mu; \tau_1\beta_1, \dots, \tau_n\beta_n) = \gamma(\sigma; \tau_1, \dots, \tau_n)\gamma(\mu; \beta_1, \dots, \beta_n)$$

où $\gamma(\sigma; \tau_1, \dots, \tau_n)$ est la permutation de $\{1, 2, \dots, p_1 + p_2 + \dots + p_n\}$ obtenue en permutant les éléments $(p_1 + \dots + p_{j-1} + 1, \dots, p_1 + \dots + p_n)$ du j -ème bloc par τ_j , puis en permutant les blocs par σ .

L'algèbre libre à un générateur $A_{\mathcal{P}}$ sur l'opérade \mathcal{P} [10] est donnée par $\oplus_{n>0} \mathcal{P}_n/S_n$. Les trois égalités ci-dessus impliquent que les compositions partielles passent au quotient ainsi que la loi pré-Lie \triangleleft , et que nous avons pour toute opération n -aire μ sur $A_{\mathcal{P}}$ et $a_j \in \mathcal{P}_{p_j}/S_{p_j}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\mu(a_1, \dots, a_{j_1}, a_j \circ_i b, a_{j+1}, \dots, a_n) = \mu(a_1, a_2, \dots, a_n) \circ_{p_1+p_2+\dots+p_{j-1}+i} b$$

En sommant sur tous les i possibles de 1 jusqu'à p_j puis sur tout les j de 1 à n , on obtient donc :

$$(62) \quad \sum_{j=1}^n \mu(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j \triangleleft b, a_{j+1}, \dots, a_n) = \mu(a_1, a_2, \dots, a_n) \triangleleft b.$$

Le théorème 13 en découle en prenant pour \mathcal{P} l'opérade pré-Lie [4] et pour μ la loi de greffe à droite :

$$\mu(a, b) = a \leftarrow b.$$

On obtient bien :

$$(a \leftarrow b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \leftarrow b + a \leftarrow (b \triangleleft c).$$

Le théorème 13 s'en déduit par le fait que : $a \leftarrow b = b \rightarrow a$ et $a \triangleleft b = b \triangleright a$.

Remerciements. — Nous remercions vivement Muriel Livernet de nous avoir indiqué l'approche opéradique présentée au paragraphe 6.2.

Références

- [1] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, (1980).
- [2] A.A.Agrachev and R.V.Gamkrelidze, *Chronological algebras and nonstationary vector fields*, j.Sov.Math (1981); 17:1, 1650-1675.
- [3] F. Chapoton, *Rooted trees and an exponential-like series*. arxiv:math /0209104v1.
- [4] F. Chapoton, M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Int. Math. Res. Not. 2001, 395–408 (2001).
- [5] A. Connes, D. Kreimer, *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry*, Comm. in Math. Phys. **199**, 203–242 (1998).
- [6] D. Calaque, K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, *Two Hopf algebras of trees interacting*, Advances in Appl. Math (à paraître), arXiv: 0806.2238.
- [7] L. Foissy, *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés I + II*, thèse, Univ. de Reims (2002), et Bull. Sci. Math. **126**, no. 3, 193–239 et no 4, 249–288 (2002).
- [8] M. Hoffman, *Combinatorics of Rooted Trees and Hopf Algebras* Trans. AMS **355**, 3795–3811 (2003).
- [9] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New-York (1969).
- [10] Victor Ginzburg and Mikhail Kapranov, *Kozul duality for operads*, Duke Math. J. **76** (1994),no.1,203-272.

7 juillet 2009

DOMINIQUE MANCHON, Université Blaise Pascal, C.N.R.S.-UMR 6620, 63177 Aubière, France

E-mail : manchon@math.univ-bpclermont.fr • *Url* : http://math.univ-bpclermont.fr/~manchon/

ABDELLATIF SAÏDI, Université de Monastir, Unité de recherche physique Mathématique, Faculté des sciences de Monastir, Avenue de l'environnement 5019, Tunisie • *E-mail* : saidiabdellatif@yahoo.fr